УДК 512.552.1

НАПІВДОСКОНАЛІ КІЛЬЦЯ ТА ЇХ САГАЙДАКИ

Ю.В. Яременко, О.О. Тархова

Вказано метод побудови напівдосконалих кілець за їх сагайдаками.

This is proved the method of construction the semiperfect rings by the quivers.

Розглядаються асоціативні кільця з одиницею.

Твердження 1 [6, с.9] . *Якщо $1=e_1+\ldots+e_n$-розклад одиниці кільця A , то $A=\bigoplus_{i=1}^{n} e_i A$ $(A=\bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i)$ − розклад кільця A в пряму суму правих (лівих) ідеалів e_iA (Ae_i).*

Нехай $1=e_1+\ldots+e_n$ – розклад одиниці кільця A і $a=1a1==(e_1+\ldots+e_n)a(e_1+\ldots+e_n)=\sum_{i,j=1}^{n} e_i a e_j$. Елементи із e_iAe_j ми будемо позначати через a_{ij}. Тоді будь-який елемент $a\in A$ зручно записувати у вигляді матриці (a_{ij}). Кільце A зображується таким чином у вигляді кільця матриць з елементами із $A_{ij}=e_iAe_j$ з звичайними операціями додавання і множення. Таке представлення називається *двостороннім пірсовським розкладом кільця A* [7, с.31]

Модуль A називається *ланцюговим*, якщо структура його підмодулів є лінійно впорядкованою.

Пряма сума ланцюгових модулів називається *напівланцюговим модулем.*

Кільце A називається *напівланцюговим*, якщо воно є напівланцюговим правим і напівланцюговим лівим модулем над собою.

Ідемпотенти можна піднімати за модулем R, якщо для будь-якого елемента $u\in A$, для якого $u^2-u\in R$ існує елемент $e^2=e\in A$ такий, що $e-u\in R$ (тобто існує ідемпотент в кільці A конгруентний з u за модулем R).

Напівлокальне кільце A називається *напівдосконалим*, якщо ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала Джекобсона R кільця A [2, с.120].

Нерозкладний модуль M називається *бірядним*, якщо він (тобто структура його підмодулів) дистрибутивний і містить ланцюгові підмодулі K_1 і K_2 (можливо й рівні нулю) такі, що K_1+K_2 є M, або найбільший власний підмодуль в M, а $K_1\cap K_2$ є нуль або найменший ненульовий підмодуль в M [3].

Напівдосконале кільце A називається *бірядним*, якщо кожний правий і кожний лівий головний A-модуль бірядний [3].

Теорема 1. *Якщо A є зведеним бірядним кільцем з двостороннім пірсовським розкладом $A=(a_{ij})$, відносно розкладу $1\in A$ в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів, то A_{ii} – ланцюгові кільця$(i=1,\ldots,n)$, а*

$A_{ij}(i \neq j)$ являється ланцюговим лівим A_{ii}-модулем і ланцюговим правим A_{jj}-модулем($i,j=1,...,n$).

При побудові сагайдаків таких кілець будемо використовувати теорему:

Теорема 2 [4]. *Нехай A – нетерове бірядне кільце. Тоді з кожної точки сагайдака кільця A виходить не більше двох стрілок і в кожну точку сагайдака кільця A входить не більше двох стрілок, причому з однієї точки в іншу (можливо збіжну з вихідною) йде не більше однієї стрілки. Навпаки, якщо є скінченний граф, що задовольняє цим умовам, то існує бірядне кільце, сагайдаком якого є цей граф.*

Лема 1. *Якщо із точки сагайдака нетерового бірядного кільця виходить одна стрілка, то головний модуль, що відповідає цій точці – ланцюговий.*

Д о в е д е н н я. Нехай P – головний модуль, що відповідає точці, вказаній у формуліровці леми. Тоді $PR/PR^2=U$, де U – простий модуль. За означенням бірядного кільця $PR=K_1+K_2$, де K_1 і K_2 – ланцюгові модулі (можливо нульові) такі, що $K_1 \cap K_2$ – або нуль, або найменший підмодуль в PR. Якщо обидва модулі K_1 і K_2 відрізняються від нуля, то PR/PR^2 не може бути простим модулем. Тому PR, а значить, і P – ланцюговий модуль.

Лема 2. *Нехай R – радикал Джекобсона локального кільця O, X – ланцюговий O-модуль і включення $XR \subset X$ строге. Тоді X – циклічний O-модуль.*

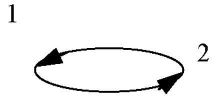
Лема 3 [1]. *Простий модуль U_k (V_k) входить в прямий розклад модуля e_iR/e_iR^2 (Re_i/R^2e_i) тоді і тільки тоді, коли $e_iR^2e_k$ ($e_kR^2e_i$) строго міститься в e_iRe_k (e_kRe_i).*

Лема 4 [6, с.47]. *Мають місце рівності $U_ie_j = 0$, $e_jV_i = 0$ при $i \neq j$ і $U_ie_i = U_i$, $e_iV_i = V_i$ ($i,j = 1,...,n$).*

Твердження 2 [4]. *Для нетерових кілець єдиний правий максимальний A_{jj} – підмодуль в A_{ij} співпадає з єдиним лівим максимальним A_{ii} – підмодулем в A_{ij}.*

Приклад 1.

Вказати вигляд напівдосконалого кільця A, яке має сагайдак $K(A)$:



Оскільки цей сагайдак складається з двох точок, то двосторонній пірсовський розклад кільця A має вигляд $A=\begin{pmatrix} \vartheta_1 & X \\ Y & \vartheta_2 \end{pmatrix}$.

Так як із точки 1 виходить одна стрілка, то правий головний A-модуль $P_1=e_1A$ – ланцюговий, отже маємо строге включення $R_1X \subset X$, звідки за критерієм напівдистрибутивності напівдосконалого кільця і лемою 2 X – лівий циклічний A_1-модуль. Точно також доводиться, що Y – лівий циклічний A_2-модуль, звідки за теоремою 10.5 [6] кільце A нетерове зліва. В силу [1] у цьому випадку A – нетерове з двох сторін напівланцюгове кільце. Якщо цоколь кільця A дорівнює нулю, то це кільце ізоморфне кільцю $H_2(O)$, де O – дискретно нормоване кільце з єдиним максимальним ідеалом M:

$$H_2(\mathrm{O})=\begin{pmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{M} & \mathrm{O} \end{pmatrix}.$$

Кільце $H_2(O)$ – спадкове первинне кільце.

<u>Приклад 2.</u>

Вказати вигляд напівдосконалого кільця A, яке має сагайдак $K(A)$:

$$1 \bullet\!\longrightarrow\!\bullet\, 2$$

Так як із точки 2 не виходить стрілка, то правий головний A-модуль P_1 – простий, отже маємо $Y = 0$, $R_2 = 0$, $YX = R_1 = 0$. Легко бачити, що в цьому випадку кільце A ізоморфне кільцю $T_2(D)$ верхніх трикутних матриць другого порядку над тілом D. Кільце $T_2(D)$ – це артинове спадкове напівланцюгове кільце.

<u>Приклад 3.</u>

Знайти вигляд нетерового напівдосконалого кільця A, яке має сагайдак $K(A)$:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r, bend left] & 3 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Двосторонній пірсовський розклад напівдосконалого кільця, сагайдак якого складається з трьох точок, має вигляд $A=\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, а його радикал Джекобсона $R=\begin{pmatrix} R_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & R_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & R_3 \end{pmatrix}$, де R_i – радикал Джекобсона кільця $\vartheta_i = e_i A e_i$, ($i = 1,2,3$).

Скористаємося тим, що сагайдак $K(A) = K(A/R^2)$ [6, с.46].

Так як у вершину 1 не входить стрілка, то лівий модуль $Q_1=\begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix}$ – простий, тому $A_{21}=0, A_{31}=0, \vartheta_1 = D_1$ – тіло. У вершинах 2 і 3 немає петель, тому $R_2 = A_{23}A_{32}$ і $R_3 = A_{32}A_{23}$. За лемою 1 лівий модуль

$Q_3 = \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ \vartheta_3 \end{pmatrix}$ – ланцюговий. Знайдемо $R^2Q_3 = \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23}R_3 \\ R_3 \end{pmatrix}$, $R^3Q_3 = \begin{pmatrix} A_{13}R_3 \\ A_{23}R_3 \\ R_3^2 \end{pmatrix}$.

Оскільки кільце A – нетерове, то за лемою Накаями циклічний бімодуль A_{13} строго включає в себе підмодуль $A_{13}R_3= R_1A_{13}$, а радикал R_3 строго включає в себе R_3^2. Тому, якщо $A_{13} \neq 0$ і $R_3 \neq 0$, то згідно лем 3 і 4 $R^2Q_3 / R^3Q_3 = u_1 + u_3$, що суперечить тому, що Q_3 - ланцюговий. Отже, $A_{13} = 0$, або $R_3 = 0$. Таким чином кільце A з розглядуваним сагайдаком ізоморфне кільцю:

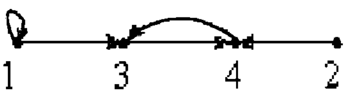
$$A = \begin{pmatrix} D_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}, \text{ де}$$

1) $R_2 = A_{23}A_{32}$, 2) $R_3 = A_{32}A_{23}$, 3) $A_{13} = 0$, або $R_3 = 0$.

Легко перевірити, що кільце A з отриманими умовами являється бірядним (модуль Q_2 – бірядний). Згідно теореми 10.5 [6] і теореми 6.1 [8] ϑ_2 і ϑ_3 дискретно нормовані кільця (локальні області головних лівих і головних правих ідеалів), або однорядні кільця Кете (ланцюгові артинові кільця). A_{12} – одновимірний лівий D_1 – простір і одновимірний правий ϑ_2 / R_2 – простір, A_{13} – одновимірний лівий D_1 – простір і одновимірний правий ϑ_3 / R_3 – простір, A_{23} – одновимірний лівий ϑ_2 / R_2 – простір і одновимірний правий ϑ_3 / R_3 – простір, A_{32} –одновимірний лівий ϑ_3 / R_3 – простір і одновимірний правий ϑ_2 / R_2 –простір.

Приклад 4.

Вказати вигляд нетерового напівдосконалого кільця A, яке має сагайдак $K(A)$:



Двосторонній пірсовський розклад будь-якого напівдосконалого кільця, сагайдак якого складається з 4-х точок має вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & \vartheta_4 \end{pmatrix}.$$

Але, так як в точку 2 сагайдака розглядуваного кільця не входить стрілка, то

лівий модуль, який відповідає цій точці $Q_2 = \begin{pmatrix} A_{12} \\ \vartheta_2 \\ A_{32} \\ A_{42} \end{pmatrix}$ – простий => $A_{12} = A_{32} = A_{42} = 0$ і $\vartheta_2 = D_2$ – тіло. Так як з точки *2* в точку *1* немає шляху, то $A_{21} = 0$. Аналогічно, з точки *3* в точку *1* немає шляху і з точки *4* в точку *1* немає шляху, отже, $A_{31} = A_{41} = 0$. Таким чином отримали кільце:

$$A = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & O & A_{13} & A_{14} \\ O & D_2 & A_{23} & A_{24} \\ O & O & \vartheta_3 & A_{34} \\ O & O & A_{43} & \vartheta_4 \end{pmatrix},$$

Оскільки сагайдак $K(A) = K(A/R^2)$ [6, с.46] і A_{14} – циклічний бімодуль, то за лемою Накаями $A_{14} \supset A_{14}R_4$. З точки *1* в точку *4* немає стрілки тому $A_{14}/(A_{14}R_4 + A_{12}A_{24} + A_{13}A_{34}) = 0$. Отже, $A_{14} = A_{13}A_{34}$. Аналогічно $A_{23} = A_{24}A_{43}$. $R_3/(R_3^2 + A_{34}A_{43}) = 0$, тому $R_3 = A_{34}A_{43}$. $R_4/(A_{43}A_{34} + R_4^2) = 0$, тому $R_4 = A_{43}A_{34}$. Розглянемо головний лівий модуль $Q_4 = \begin{pmatrix} A_{14} \\ A_{24} \\ A_{34} \\ \vartheta_4 \end{pmatrix}$. У точку *4* входять дві стрілки, отже, Q_4 – бірядний модуль. Так як $RQ_4 = K_1 + K_2$, де K_1 і K_2 – ланцюгові модулі, то $e_1K_1 + e_1K_2 = A_{14}$, $e_2K_1 + e_2K_2 = A_{24}$, $e_3K_1 + e_3K_2 = A_{34}$, і $e_4K_1 + e_4K_2 = R_4$. Враховуючи, що A_{14}, A_{24}, A_{34} – ланцюгові бімодулі, а R_4 – ланцюговий ϑ_4 – модуль, отримаємо:

$$M=\begin{pmatrix} \vartheta_1 & O & A_{13} & A_{14} \\ O & D_2 & A_{23} & A_{24} \\ O & O & \vartheta_3 & A_{34} \\ O & O & A_{43} & \vartheta_4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} O \\ O \\ A_{34} \\ O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{14} \\ A_{23}A_{34} \\ A_{34} \\ R_4 \end{pmatrix} \subseteq K_1 .$$

$$RM=\begin{pmatrix} A_{14} \\ A_{23}A_{34} \\ A_{34}R_4 \\ R_4 \end{pmatrix}. \quad R^2M=\begin{pmatrix} A_{14}R_4 \\ A_{23}A_{34} \\ A_{34}R_4 \\ R_4{}^2 \end{pmatrix}.$$

Якщо $A_{14} \neq 0$ і $R_4 \neq 0$, то за лемами 3 та 4 $RM/R^2M = U_1 + U_2$, що суперечить тому, що M – ланцюговий модуль. Отже, $A_{14} = 0$ або $R_4 = 0$.

Аналогічно, розглянувши бірядний лівий модуль Q_3 і його ланцюговий підмодуль

$$L = A\cdot \begin{pmatrix} O \\ O \\ O \\ A_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{13}R_3 \\ A_{23} \\ R_3 \\ A_{43} \end{pmatrix}, \quad RL = \begin{pmatrix} A_{13}R_3 \\ A_{23} \\ R_3 \\ A_{43}R_3 \end{pmatrix}, \quad R^2L = \begin{pmatrix} A_{13}R_3 \\ A_{23}R_3 \\ R_3{}^2 \\ A_{43}R_3 \end{pmatrix},$$

отримаємо, що $A_{23} = 0$ або $R_3 = 0$.

Отже, шукане кільце є бірядним кільцем, яке має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} \vartheta_1 & O & A_{13} & A_{14} \\ O & D_2 & A_{23} & A_{24} \\ O & O & \vartheta_3 & A_{34} \\ O & O & A_{43} & \vartheta_4 \end{pmatrix},$$ де D_2 – тіло, ϑ_1, ϑ_3 і ϑ_4 –дискретно нормовані кільця (локальні області головних лівих і головних правих ідеалів), або однорядні кільця Кете (ланцюгові артинові кільця) і

1) $A_{14} = A_{13}A_{34}$. 2) $A_{23} = A_{24}A_{43}$. 3) $R_3 = A_{34}A_{43}$. 4) $R_4 = A_{43}A_{34}$.

5) $A_{14} = 0$ або $R_4 = 0$. 6) $A_{23} = 0$ або $R_3 = 0$.

В наступному прикладі нам будуть потрібними наступні поняття:

Нерозкладний модуль M називається *n-рядним* [5], якщо він дистрибутивний і містить ланцюгові підмодулі $K_1, \ldots, K_n$ (можливо і нульові) такі, що $K_1 + \ldots + K_n$ є M, або найбільший власний підмодуль в M, а $K_i \cap K_j$, $i \neq j$, – нуль або простий модуль.

Напівдосконале кільце A будемо називати *n-рядним*, якщо кожний головний правий і кожний головний лівий A-модуль є n-рядним [5].

Зрозуміло, що при $n = 1$ ми отримаємо напівланцюгові кільця, а при $n = 2$ – бірядні кільця.

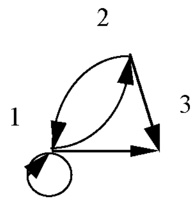
Теорема 3 [5]. *Якщо кільце A багаторядне справа (зліва), e – ненульовий ідемпотент кільця A, то кільце eAe багаторядне справа (зліва). Зокрема, якщо кільце A багаторядне, то й кільце eAe багаторядне.*

Теорема 4 [5]. *Локальне багаторядне кільце A є ланцюговим.*

Теорема.5 [5]. *Нехай A – нетерове n-рядне кільце. Тоді з будь-якої точки сагайдака кільця A виходить не більше n стрілок і в будь-яку точку сагайдака кільця A входить не більше n стрілок, причому з однієї точку в іншу (можливо, співпадаючу з вихідною) іде не більше однієї стрілки. Навпаки, якщо є скінчений граф, що задавольняє цим умовам, то існує n-рядне кільце, сагайдаком якого є цей граф.*

<u>Приклад 5.</u>

Вказати вигляд нетерового напівдосконалого кільця A, яке має сагайдак $K(A)$:



Двосторонній пірсовський розклад кільця, сагайдак якого складається з трьох точок, має вигляд: $A = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$.

Так як з вершини 3 не виходить стрілка, то модуль $P_3 = (A_{31} \quad A_{32} \quad \vartheta_3)$ – простий, тому $A_{31} = 0$, $A_{32} = 0$, $\vartheta_3 = D_3$ – тіло. Радикал Джекобсона тіла рівний нулю, тому $R_3 = 0$.

Отже, в даному прикладі маємо кільце

$A = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}$, з радикалом Джекобсона $R = \begin{pmatrix} R_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & R_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Тоді $R^2 = \begin{pmatrix} R_1^2 + A_{12}A_{21} & R_1A_{12} & R_1A_{13} + A_{12}A_{23} \\ R_2A_{21} & A_{21}A_{12} + R_2^2 & A_{21}A_{13} + R_2A_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Так як у вершині 2 немає петлі і сагайдак $K(A) = K(A/R^2)$, то $R_2 = A_{21}A_{12}$. Оскільки кільце A – нетерове, то за твердженням 2 $R_2A_{23} = A_{23}R_3 = 0$ (так як $R_3 = 0$). Крім того за лемою Накаями циклічний бімодуль A_{23} строго включає в себе підмодуль R_2A_{23} і A_{23} строго включає в себе підмодуль $A_{21}A_{13}$ (так як із точки *2* в точку *3* йде стрілка), отже, $A_{21}A_{13} = 0$.

Аналогічно, $A_{13}R_3 = R_1A_{13} = 0$ і $A_{13} \supset A_{12}A_{23}$, тому $A_{12}A_{23} = 0$.

З точки *2* виходять дві стрілки, отже модуль $P_2 = \begin{pmatrix} A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \end{pmatrix}$ – бірядний. З точки *1* виходять три стрілки, тому модуль $P_1 = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \end{pmatrix}$ – *n*-рядний (*n=3*).

Отже, отримали нетерове багаторядне кільце, яке ізоморфне кільцю:

$$A = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix},$$

де D_3 – тіло, ϑ_1, ϑ_2, –дискретно нормовані кільця (локальні області головних лівих і головних правих ідеалів), або однорядні кільця Кете (ланцюгові артинові кільця) і виконуються умови:

1) $R_2 = A_{21}A_{12}$, 2) $A_{12}A_{23} = 0$, 3) $A_{21}A_{13} = 0$.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Кириченко В.В. Обобщенно однорядные кольца // Мат. сб. – 1976. – Т. 99, № 4. – С. 559-581.
2. Bass H. Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 95. – P. 466-488.
3. Кириченко В.В., Костюкевич П.П. Бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1986. – Т.38, № 6. – С. 718-723.
4. Кириченко В.В., Яременко Ю.В. Нетеровы бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1988. – Т.40, №4. – С. 435-440.
5. Кириченко В.В., Яременко Ю.В. Многорядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1996. – Т. 48, № 9. – С. 1223-1235.
6. Кириченко В.В. Кольца и модули. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1981. – 64 с.
7. Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. Конечномерные алгебры. – К.: Вища шк., 1980. – 192 с.
8. Кириченко В.В. Обобщенно однорядные кольца // К., 1975. – 58 с. – (Препр. АН Украины. Ин-т математики; 75.1).

Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка

Надійшло 9 лютого 2006 р.